

2. 假设 A 的一个列组合等于这些列的另一个不同的组合, 记为 $Ax = Ay$ 。再找出 A 的两个列组合, 使得它们等于零向量 (在矩阵语言中, 即找到 $Az = 0$ 的两个解)。
3. (练习下标的用法) 向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 在 m 维空间 $\mathbf{R}^m$ 中, 且组合 $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$ 是零向量, 这是向量层面的表述。

(1) 试用矩阵语言写出上面的表述。用这些 a 向量作为矩阵 A 的列, 并采用列向量 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 。

(2) 将上面的表述在标量层面写出。采用下标与 Σ 求和形式将数加起来。列向量 a_j 的分量是 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ 。

4. 假设 A 是 3×3 矩阵 $\text{ones}(3, 3)$, 它的每个矩阵元素都是 1。求两个独立向量 x 和 y , 使其满足 $Ax = 0$, $Ay = 0$ 。将第一个方程 $Ax = 0$ 写为 A 的列向量的组合。能求出第 3 个满足 $Az = 0$ 的独立向量吗?

5. $v = (1, 1, 0)$ 和 $w = (0, 1, 1)$ 的线性组合填充了 $\mathbf{R}^3$ 中的一个平面。

(1) 求一个垂直于 v 和 w 的向量 z , 则 z 垂直于平面中的任意向量 $cv + dw$: $(cv + dw)^T z = cv^T z + dw^T z = 0 + 0$ 。

(2) 对一个不在这个平面上的向量 u , 验证 $u^T z \neq 0$ 。

6. 若一个平行四边形的三个顶点的坐标是 $(1, 1)$, $(4, 2)$ 和 $(1, 3)$, 则第四个顶点的所有三种可能是什么? 画出其中两个。

7. 描述 $A = [v \ w \ v + 2w]$ 的列空间。描述 A 的零空间, 即所有满足 $Ax = 0$ 的向量 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的集合。将此平面 (A 的列空间) 与直线 (A 的零空间) 的“维数”加在一起:

$$\text{列空间的维数} + \text{零空间的维数} = \text{列数}$$

8. $A = CR$ 表示将 A 的列向量写为列空间的基的线性组合, 其中基向量作为列向量构成矩阵 C , 系数构成矩阵 R 。若 3×3 矩阵 $A_{ij} = j^2$, 写出 A 、 C 与 R 。

9. 假设一个 $m \times n$ 矩阵的列空间是 $\mathbf{R}^3$ 。 m 代表什么? n 代表什么? 秩 r 代表什么?

10. 求包含有 A_1 与 A_2 独立列的矩阵 C_1 和 C_2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

11. 将习题 10 的矩阵分解为 $A = CR$ 的形式。矩阵 R 包含的数与 C 的列相乘就可以恢复 A 的列。这是看待矩阵乘法的一种方式, 即 C 乘以 R 的每一列。

12. 给出 A_1 和 A_2 的列空间的基。求: 这些列空间的维数 (独立向量的数目), A_1 、 A_2 的秩, A_1 、 A_2 独立的行。

13. 构造一个秩为 2 的 4×4 矩阵。 C 和 R 的形状是怎样的?

14. 假设两矩阵 A 、 B 有相同的列空间。

(1) 说明它们的行空间可以是不同的。

(2) 说明矩阵 C (即基列矩阵) 可以是不同的。

(3) 哪个数对矩阵 A 和 B 是一样的?

15. 设 $A = CR$, 那么 A 的第一行是 R 各行的组合。哪个矩阵的哪部分存有这个组合的系数 (用来乘 R 的行产生 A 的第一行的数)?
16. R 的行是 A 的行空间的一组基。这句话含义是什么?
17. 对下列分块矩阵, 求 $A = CR$ 。求它们的秩。

$$A_1 = \begin{bmatrix} \text{zeros} & \text{ones} \\ \text{ones} & \text{ones} \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_1 \end{bmatrix}_{8 \times 4}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix}_{8 \times 8}$$

18. 若 $A = CR$, 求矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$ 的 CR 分解。
19. “消元法”从第 i 行中减去第 j 行的 ℓ_{ij} 倍: 这是“行运算”。给出步骤将例 4 中矩阵 A 化简为 R (此处这个行阶梯形 R 有一行全为零)。其秩不会发生变化。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rref}(A)$$

新的开始与一本新的书

1.1 节启发我开始用一种全新的方式讲授线性代数, 我意识到借助分量是小整数的矩阵, 关键的概念能够在课程开始阶段给出。

下面解释这些概念, 因为它们引导读者直接进入线性代数。这也促使我编写了另一本新的教科书, 名为《适合每个人的线性代数》(*Linear Algebra for Everyone*), 读者可以访问 math.mit.edu/everyone 了解更多的信息。这些关键概念是:

独立的列 列空间 矩阵的秩 矩阵乘积 $A = CR$

$A = CR$ 的例:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{cases} C \text{ 有 } A \text{ 中的 2 个独立的列} \\ R \text{ 有 2 个包含 } I \text{ 的独立的行} \\ A \text{ 的第 3 列} = -1 \times (\text{第 1 列}) + 2 \times (\text{第 2 列}) \end{cases}$$

所有这三个矩阵的秩 $r = 2$ 。 C 表示 A 的列空间的一组基。 R 表示 A 的行空间的一组基。这两个空间都是三维空间中的平面。 $A = CR$ 引出一个有三个因子紧密相连的形式, 其中列与行对称地出现:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{cases} \text{来自 } A \text{ 的 2 列在 } C \text{ 中} \\ R \text{ 来自 } A \text{ 的 2 行形成了新的 } R \\ 2 \times 2 \text{ 的 (行与列) 重叠部分求逆} \end{cases}$$

这是第一次遇到逆矩阵, 因此在这里加以解释: $A \times A^{-1} = \text{单位矩阵 } I$ 。

$$2 \times 2 \text{ 矩阵的逆} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

若 $ad = bc$, 则逆不存在

这个新思路是直接处理矩阵乘积 CR 。它引出 C 的列的组合。这对向量来说是本质的一步：取它们的组合。当观察这两列的所有组合时，就在填充一个平面了。如果 A 的第三列不在这个平面上， A 就是可逆的：矩阵的秩是 3。可以阅读《适合每个人的线性代数》的 1.3 节和 1.4 节。

$A = CR$ 之后是线性代数的五大分解——从用 $A = LU$ 求解 n 个方程 $Ax = b$ 开始。这些就是线性代数的组织原则。它们包括方阵的特征值与所有矩阵的奇异值，深入有效地反映出矩阵的信息，其中 C 直接从 A 中取得列。

当 A 中的数字有明确的意义（它们可能都是正的，或可能看到许多零），在 C 中保留这些性质不是一件坏事。

$$\text{推荐：验证} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

故 A 的上述两种分解的结果是一致的。

推荐：构造一个秩为 1 的 3×3 矩阵 A ，将其分解为 $A = CR$ 。

1.2 矩阵与矩阵相乘： AB

内积（行乘列）得到 $AB = C$ 中的每个元素。

$$\begin{array}{l} \text{由 } A \text{ 的第 2 行} \\ \text{ } B \text{ 的第 3 列} \\ \text{得到 } C \text{ 中的 } c_{23} \end{array} \quad \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{23} \end{bmatrix} \quad (1)$$

点积 $c_{23} = (A \text{ 的第 2 行}) \cdot (B \text{ 的第 3 列})$ 是各个 a 乘以相应 b 的和：

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = \sum_{k=1}^3 a_{2k}b_{k3}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (2)$$

这就是通常计算 $AB = C$ 中每个元素的方法。

得到乘积 AB 的另一种方法是将 A 的列乘以 B 的行。可以用具体的数说明两个主要的点：一列 u 乘以一行 v^T 就得到一个矩阵。首先集中在 AB 那部分。这个矩阵 uv^T 特别简单：

$$\text{“外积”} \quad uv^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 6 & 8 & 12 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \text{“秩为 1 的矩阵”}$$

一个 $m \times 1$ 矩阵（列向量 u ）乘以一个 $1 \times p$ 矩阵（行向量 v^T ）得到一个 $m \times p$ 矩阵。注意这

个秩为 1 的矩阵 uv^T 有何特别之处:

$$uv^T \text{ 的所有列是 } u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 的倍数, 而所有行是 } v^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ 的倍数.}$$

uv^T 的列空间是一维的: 它是沿 u 的方向的直线。列空间的维数 (独立列的数目) 是矩阵的秩 (一个关键的数)。所有非零矩阵 uv^T 的秩都是 1。它们是每个矩阵的完美构建基块。

也要注意 uv^T 的行空间是沿着 v 的直线。根据定义, 任何矩阵 A 的行空间是其转置矩阵 A^T 的列空间, 记为 $C(A^T)$ 。这样, 只要处理列向量就可以了。在这个例子中, 将 uv^T 转置 (行列互换) 得到矩阵 uv^T :

$$(uv^T)^T = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 6 & 8 & 12 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 4 \\ 12 & 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = vu^T$$

可以看到线性代数中的第一个大定理的最清晰的例子:

$$\text{行秩} = \text{列秩}, \quad r \text{ 个独立的列} \Leftrightarrow r \text{ 个独立的行}$$

一个非零矩阵 uv^T 有一个独立的列与一个独立的行。所有的列都是 u 的倍数, 而所有的行都是 v^T 的倍数。对于这个矩阵, 其秩 $r = 1$ 。

$AB =$ 秩为 1 的矩阵之和

用 A 的列乘以 B 的行, 得到 AB 的完整乘积。令 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 A 的 n 列, 则 B 必定有 n 行 $b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*$ 。这样矩阵 A 就能乘以 B 了。它们的乘积 AB 是列向量 a_k 乘以行向量 b_k^* 的和:

矩阵的列行相乘

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{bmatrix} = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \cdots + a_n b_n^* \quad (3)$$

秩为 1 的矩阵之和

下面是一个 2×2 的例子, 用以显示 $n = 2$ 项 (列乘以行) 以及它们的和 AB :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 17 \end{bmatrix} \quad (4)$$

数与数相乘的次数: 相乘 4 次得到 2、4、6、12, 再相乘 4 次得到 0、0、0、5, 总共相乘次数 $2^3 = 8$ 。当 A 、 B 是 $n \times n$ 矩阵时, 总是有 n^3 次乘法运算。而当 AB 为 $(m \times n) \times (n \times p)$ 矩阵时, 则有 mnp 次相乘: n 个秩为 1 的矩阵, 每个这样的矩阵都是 $m \times p$ 矩阵。

计数与通常的内积方法是一样的。 A 的行乘以 B 的列需要 n 次乘法运算。对 AB 的每个数字计算：当 AB 是 $m \times p$ 矩阵时，需 mp 个点积。当将 $m \times n$ 矩阵乘以 $n \times p$ 矩阵时，相乘次数又是 mnp 。

行乘以列 mp 个内积，每个有 n 次相乘 mnp
列乘以行 n 个外积，每个有 mp 次相乘 mnp

由上可以看出，它们其实是完全相同的乘法 $a_{ik} b_{kj}$ ，只是顺序不同。下面是 $C = AB$ 中的每个元素 c_{ij} 通过式 (3) 的外积与通过式 (2) 的内积是相同的代数证明：

$$a_k b_k^* \text{ 的 } i, j \text{ 元素是 } a_{ik} b_{kj}, \text{ 相加得到 } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \text{第 } i \text{ 行} \cdot \text{第 } j \text{ 列}$$

从列乘以行得到的内在信息

之所以外积的方法在数据科学中如此重要，是因为我们正在寻找矩阵 A 的重要部分。通常不喜欢 A 中的最大数（尽管那也可能是重要的），而是希望得到的是 A 中的主要部分，而这些部分就是秩为 1 的矩阵 uv^T 。应用线性代数中的一个主题就是：

将 A 分解为 CR ，看 $A = CR$ 中的 $c_k r_k^*$ 部分

将 A 分解为 CR 是矩阵相乘 $CR = A$ 的逆过程。分解更费时，特别是当其中的一些部分涉及特征值或奇异值时。但是，那些数包含矩阵 A 的内在信息，只有在做分解后才能看到。

下面是五个重要的矩阵分解，原始的乘积矩阵（通常用 A ）及其因子用标准字母表示。本书将解释所有这五个分解。

$$A = LU, \quad A = QR, \quad S = Q\Lambda Q^T, \quad A = X\Lambda X^{-1}, \quad A = U\Sigma V^T$$

这里只简单地列出每个分解的关键词和性质。

(1) $A = LU$ 来自消元法。通过行的组合可由 A 得到 U ，由 U 回到 A 。矩阵 L 为下三角矩阵，而 U 是上三角矩阵，参见式(4)。

(2) $A = QR$ 来自将列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 正交化，就如“Gram-Schmidt”方法那样。 Q 由正交列组成 ($Q^T Q = I$)，而 R 是上三角矩阵。

(3) $S = Q\Lambda Q^T$ 来自一个对称矩阵 $S = S^T$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。特征值组成 Λ 的对角元。正交的特征向量是矩阵 Q 的列。

(4) $A = X\Lambda X^{-1}$ 是具有 n 个独立的特征向量的 $n \times n$ 矩阵 A 的对角化。 A 的特征值在 Λ 的对角线上。 A 的特征向量为 X 的列。

(5) $A = U\Sigma V^T$ 是任意矩阵 A （不论是否是方块矩阵）的奇异值分解。奇异值 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 在 Σ 中。单位正交的奇异向量在 U 和 V 中。

采用分解式 (3) 来说明想法。这个特别的 $Q\Lambda Q^T$ 分解由一个对称矩阵 S 开始。该矩阵具有正交的单位特征向量： $q_1, q_2, \dots, q_n$ 。这些互相垂直的特征向量（其点积为 0）构成 Q 的列。 S 和 Q 是线性代数的“国王”和“皇后”。

对称矩阵 S	$S^T = S$	所有 $s_{ij} = s_{ji}$
正交矩阵 Q	$Q^T = Q^{-1}$	所有 $q_i \cdot q_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

对角矩阵 Λ 包含实数特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。每个实对称矩阵 S 有 n 个 $q_1, \dots, q_n$ 的单位正交特征向量。当 S 与之相乘时, 特征向量的方向不变。它们只是缩放为 $1/\lambda$:

$$\boxed{\text{特征向量 } q \text{ 和特征值 } \lambda \quad Sq = \lambda q} \quad (5)$$

对于一个大矩阵, 求出 λ 和 q 并不容易。但当 S 是对称阵时, 这 n 对 λ, q 总存在。我们的目标是从列 $Sq = \lambda q$ 得到 $SQ = Q\Lambda$:

$$SQ = S \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 q_1 & \cdots & \lambda_n q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = Q\Lambda \quad (6)$$

用 $Q^{-1} = Q^T$ 右乘 $SQ = Q\Lambda$ 就得到对称矩阵 $S = Q\Lambda Q^T$ 。每个特征值 λ_k 与相应的特征向量 q_k 给 S 贡献一个秩为 1 的成分 $\lambda_k q_k q_k^T$ 。

$$\text{秩为1的成分} \quad S = (Q\Lambda)Q^T = (\lambda_1 q_1)q_1^T + (\lambda_2 q_2)q_2^T + \cdots + (\lambda_n q_n)q_n^T \quad (7)$$

$$\text{全部是对称的} \quad q_i q_i^T \text{ 的转置是 } q_i q_i^T \quad (8)$$

注意 $Q\Lambda$ 的列是 $\lambda_1 q_1, \lambda_2 q_2, \dots, \lambda_n q_n$ 。当用对角矩阵 Λ 右乘一个矩阵时, 是用 λ 分别乘以这个矩阵的对应列。

我们以对谱定理 $S = Q\Lambda Q^T$ 的证明的评论来结束本节: 每个对称矩阵 S 有 n 个实特征值和 n 个单位正交的特征向量。在 1.6 节中, 会由 n 阶多项式 “ $P_n(\lambda) = S - \lambda I$ 的行列式” 的根得到特征值。当 $S = S^T$ 时, 它们是实数。证明的微妙之处在于特征值 λ_i 是重根时, 它可能是一个二重根或来自 $(\lambda - \lambda_j)^M$ 因子的 M 重根。在这种情况下, 需要得到 M 个互相独立的特征向量。 $S - \lambda_j I$ 的秩必为 $n - M$ 。当 $S = S^T$ 时, 这是成立的, 但需要证明。

类似地, 当一个奇异值 σ 在对角矩阵 Σ 中重复 M 次时, 奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$ 要求特别耐心。同样会有 M 对奇异向量 v 与 u 满足 $Av = \sigma u$ 。这个正确的说法也需要证明。

行的符号 对 AB 中的第二个矩阵引入符号 $b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*$ 来表示其行。读者可能期待用 $b_1^T, b_2^T, \dots, b_n^T$, 那是我们原来的选择。但这个记法并不完全清晰, 它似乎指 B 的列的转置。因为右乘的矩阵是 U, R, Q^T, X^{-1} 或 V^T , 新采用的符号能更明确地表明: 我们想要那个矩阵的行。

[1] Strang G. *Multiplying and factoring matrices*[J]. Amer. Math. Monthly **125**, 2018: 223-230.

[2] Strang G. *Introduction to Linear Algebra*[M]. 5th ed., Wellesley-Cambridge Press, 2016.

习题 1.2

1. 设 $Ax = 0$, $Ay = 0$ (x, y 和 0 都是向量)。在此条件下考虑矩阵方程 $AB = C$ 。矩阵 B, C 有什么性质? 若矩阵 A 是 $m \times n$ 型, 求 B, C 的矩阵型。

2. 设 a, b 为列向量, 其分量是 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 与 $b_1, b_2, \dots, b_p$ 。是否能够计算 a 乘以 b^T ? (回答是或不是) 其答案 ab^T 是什么型的矩阵? 求 ab^T 的第 i 行与第 j 列元素。说明 aa^T 。
3. (习题 2 的扩展: 练习下标) 取代一个 a 向量, 设 A 中有 n 个列向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。设 B 中有 n 个行向量 $b_1^T, b_2^T, \dots, b_n^T$ 。

(1) 把矩阵乘积 AB 表示为“秩为 1 的矩阵的和”。

(2) 给出矩阵乘积 AB 中 (i, j) 元素的公式。用求和 Σ 的表示法将习题 2 得到的每个矩阵 $a_k b_k^T$ 中的 (i, j) 元素相加。

4. 设 B 只有一列 ($p=1$), 则 B 的每行只有一个元素。 A 仍有 n 列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。写出 AB 的列乘以行的公式。 $m \times 1$ 的列向量 AB 是____ (用文字表述)。
5. 从矩阵 B 出发, 若想求其行的组合, 则将其用 A 左乘得 AB 。若想求其列的组合, 则将其用 C 右乘得 BC 。本题中做两种运算:

首先行运算, 然后列运算 首先 AB , 然后 $(AB)C$

首先列运算, 然后行运算 首先 BC , 然后 $A(BC)$

结合律 告诉我们这两种运算方式得到的最后结果是一样的。

给定 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, 验证 $(AB)C = A(BC)$ 。

6. 设 A 有列向量 a_1, a_2, a_3 , $B = I$ 是一个单位矩阵, 求秩为 1 的矩阵 $a_1 b_1^*$ 、 $a_2 b_2^*$ 和 $a_3 b_3^*$ 。加在一起应该得到 $AI = A$ 。
7. 一个结论: AB 的列向量是 A 的列向量的组合。则 AB 的列空间包含于 A 的列空间中。给出一个 A 和 B 的例子, 使得 AB 的列空间比 A 的列空间小。
8. 为计算 $C = AB = (m \times n)(n \times p)$, 下面三个相同命令中什么次序可以得到列乘行 (外积)?

行乘列	列乘行
For $i = 1$ to m	For...
For $j = 1$ to p	For...
For $k = 1$ to n	For...
$C(i, j) = C(i, j) + A(i, k) * B(k, j)$	$C =$

1.3 4 个基本子空间

本节将介绍线性代数的“大图景”, 这张图显示了每个 $m \times n$ 矩阵 A 如何引出 4 个子空间——两个 $\mathbf{R}^m$ 的子空间与两个 $\mathbf{R}^n$ 的子空间。第一个例子是秩为 1 的矩阵 uv^T , 它的列空间是沿 u 方向的直线, 而行空间是沿 v 方向的直线。第二个例子是一个 2×3 矩阵。第三个例子 (5×4 矩阵 A) 是一个图的关联矩阵。图已经成为离散数学中最重要的模型——这个例子需要认真理解。所有 4 个子空间在图上都有含义。

例 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = uv^T$ 有 $m=2$, $n=2$ 。 $\mathbf{R}^2$ 的子空间如下:

1. 列空间 $C(A)$ 是沿 $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 的直线。第 2 列在那条直线上。
2. 行空间 $C(A^T)$ 是沿 $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的直线。 A 的第 2 行在那条直线上。
3. 零空间 $N(A)$ 是沿 $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的直线。于是 $Ax = 0$ 。
4. 左零空间 $N(A^T)$ 是沿 $y = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的直线。于是 $A^T y = 0$ 。

根据定义，可以在图 1.1 中画出这 4 个子空间：

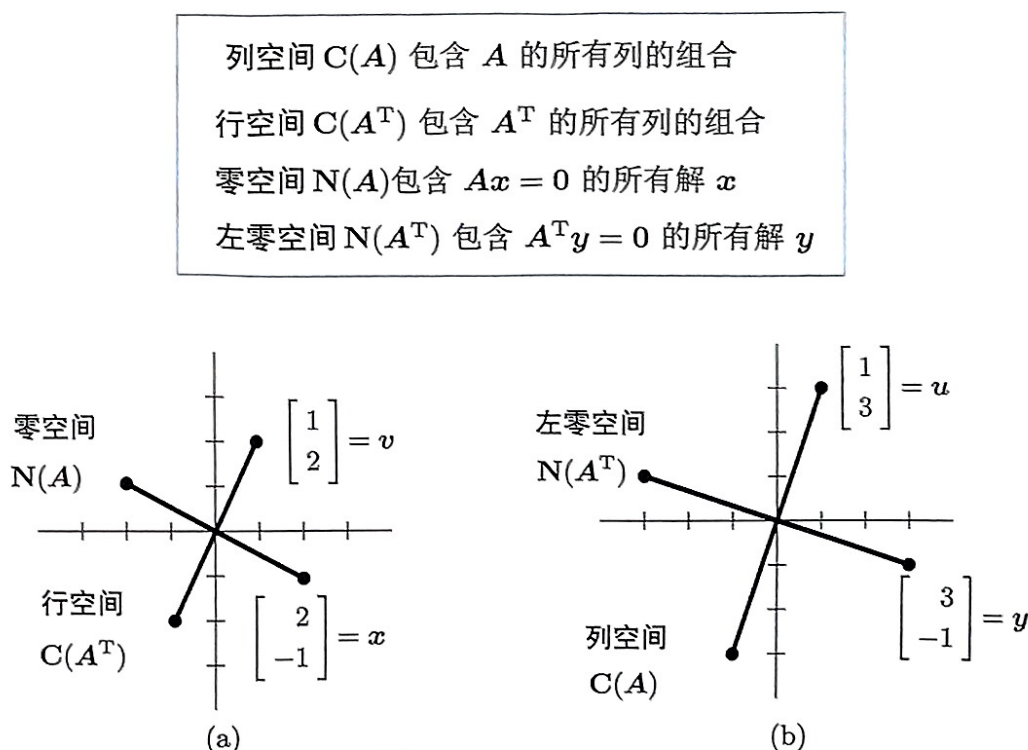


图 1.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 的 4 个基本子空间 (4 条无限长的直线)

这个例子仅有一个 u 、一个 v 、一个 x 和一个 y 。所有 4 个子空间都是一维的，即是直线。 u 、 v 、 x 和 y 始终是独立的向量，它们分别给出这些子空间的一组“基”。一个更大的矩阵的每个子空间将具有一个以上基向量。基向量的选择是科学计算中的关键步骤。

例 2 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$ 有 $m = 2$ 行， $n = 3$ 列。其子空间分别在 $\mathbf{R}^3$ 和 $\mathbf{R}^2$ 中。从矩阵

A 到 B ，有两个子空间变了，另外两个子空间没有变。 B 的列空间依然在 $\mathbf{R}^2$ 中，它具有同样的基向量。但是，现在 B 的每一行有 $n = 3$ 个数，因此图 1.1 的左半边图是在 $\mathbf{R}^3$ 中。在行空间中，依然只有一个 v 。 B 的秩也依然是 $r = 1$ ，因为其两行都在同一方向上。

方程 $Bx = 0$ 有 $n = 3$ 个未知数，只有 $r = 1$ 个独立方程，则它有 $3 - 1 = 2$ 个独立解 x_1 和 x_2 。