



$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) = [mgl \sin x_1, ml^2 x_2] [x_2, -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2]^T = -kl^2 x_2^2 \leq 0$$

因为 x_1 为任意, $x_2 = 0$ 时, $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, 所以 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 不是负定, 而是负半定。根据定理 5.1 知, 系统在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是稳定的, 但不能根据定理 5.2 得出渐进稳定的结论, 因为在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的邻域内 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 不是负定的, 虽然直觉告诉我们它是渐进稳定的。实际上, 有摩擦的单摆系统, 原点平衡点是渐进稳定的。

上面论述的稳定性的定义从概念上来说, 仅揭示了局部性的特征。从定义来看, 对于平衡点 $\mathbf{x}_e$, 当

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$$

也就是说, 从 $\mathbf{x}_e$ 附近开始的运动仍保留在 $\mathbf{x}_e$ 附近, 稳定性更重要的概念是渐进稳定, 即系统的运动不仅能停留在 ε 内, 而且能在极限的情况下收敛于 $\mathbf{x}_e$ 。若平衡点是稳定的, 重要的是, 要知道在什么条件下, 任何一个初始状态是收敛于平衡点的。具有这种性质的平衡点称之为全局渐进稳定, 或大范围渐进稳定。

定义 5.5 若系统的平衡点是稳定的, 且任何一个初始状态的运动, 当 $t \rightarrow \infty$ 时均收敛于平衡点 $\mathbf{x}_e$, 则平衡点 $\mathbf{x}_e$ 称为大范围渐进稳定的, 或全局渐进稳定。

对于定理 5.2, 若能导出它在状态空间 $\mathbf{R}^n$ 中成立的条件, 那么系统平衡点就是全局渐进稳定的。当然, 这仅仅是必要条件, 而不是充分条件。理由是, 定理 5.1 也包括定理 5.2 的证明取决于 $V(\mathbf{x})$ 函数的正定性与 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定性相关联导致 $V(\mathbf{x}) < V(\mathbf{x}_0)$ 才行。然而, 这一性质在定理 5.1 中以 $\Omega_\beta = \{\mathbf{x} \in B_r : V(\mathbf{x}) \leq \beta\}$ 定义的空间的一个紧集中才成立。更确切地说, 在定理 5.1 中, 通过选择一个球 $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq r\}$ 开始, 然后证明 $\Omega_\beta \subset B_r$ 。集合 Ω_β 和 B_r 均为闭集(因为它们是有界的, 从而也是紧的)。现在若 B_r 允许是整个空间 $\mathbf{R}^n$, 那么情况就发生了改变, 因为一般地在一个确定的有界闭集中条件 $V(\mathbf{x}) \leq \beta$ 并不成立。这同样意味着 Ω_β 不是一个闭集, 因而, 甚至当 $V(\mathbf{x}) \leq \beta$ 时, 轨迹偏离平衡点也是可能的。下例可说明这一点。

例 5.2 考虑如下正定函数

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

对于 $\beta < 1$, 函数 $V(\mathbf{x}) \leq \beta$ 的区域是一个闭区域。然而, 当 $\beta > 1$ 时, $V(\mathbf{x})$ 的等位面就是开的了。图 5.2 表明, 一种初始状态可以从原点的平衡状态分离, 而使运动朝低能量轨迹弯曲。

解决这个问题得出一个附加条件, 即 $V(\mathbf{x}) = \beta$ 是一个闭的弯曲曲线。这只能当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $V(\mathbf{x})$ 增长为无界才成

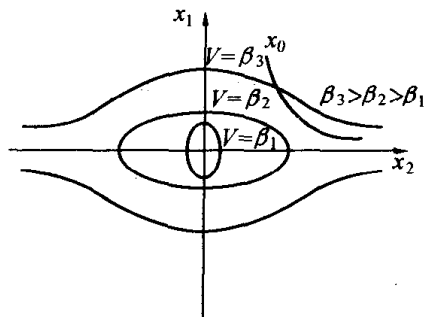


图 5.2 $V(\mathbf{x}) = \beta$ 被弯曲